خیلی سبز!

۱۴۰۰

داخل کشور

دفترچه شماره ۲
آزمون اختصاصی

ویژه نظام آموزشی ۳ـ۳ـ۶

آزمون سراسری ورودی دانشگاه های کشور - ۱۴۰۰

گروه آزمایشی علوم تجربی
آزمـــون اختصاصی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

• تعداد سؤال: ۱۷۰ • مدت پاسخگویی: ۱۷۵ دقیقه

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
۱	زمین‌شناسی	۲۵	۱۰۱	۱۲۵	۲۰ دقیقه
۲	ریاضی	۳۰	۱۲۶	۱۵۵	۴۷ دقیقه
۳	زیست‌شناسی	۵۰	۱۵۶	۲۰۵	۳۶ دقیقه
۴	فیزیک	۳۰	۲۰۶	۲۳۵	۳۷ دقیقه
۵	شیمی	۳۵	۲۳۶	۲۷۰	۳۵ دقیقه

ریاضی

۱۲۶- فرض کنید $a=\sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$ و $b=\sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$. مقدار $(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2$ کدام است؟

۱) $4(2+\sqrt{3})$ ۲) $4(2-\sqrt{3})$ ۳) $16(2+\sqrt{3})$ ۴) $16(2-\sqrt{3})$

۱۲۷- فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $2\sqrt[3]{x}=(1-\sqrt[3]{x^2})(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[3]{x^2})$ باشند. مقدار x_1+x_2 کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲۸- فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x=5-x^2$ باشند. $\frac{1}{(x_2+1)^3}$ و $\frac{1}{(x_1+1)^3}$ ریشه‌های کدام معادله هستند؟

۱) $125x^2+16x=1$ ۲) $125x^2=16x+1$ ۳) $125x^2=12x+1$ ۴) $125x^2+12x=1$

۱۲۹- اگر $f(x)=16\cos^2(3x)\cos^2(6x)\cos^2(12x)\cos^2(24x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{36})$ کدام است؟

۱) $\frac{6-3\sqrt{3}}{16}$ ۲) $\frac{6-\sqrt{3}}{16}$ ۳) $\frac{6+\sqrt{3}}{16}$ ۴) $\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$

۱۳۰- اگر زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی و $\tan(\alpha)=\frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)}{\cot(2\alpha)}$ کدام است؟

۱) $-\frac{96}{175}$ ۲) $\frac{1056}{175}$ ۳) $\frac{96}{175}$ ۴) $-\frac{1056}{175}$

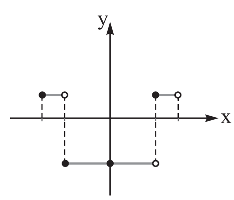
۱۳۱- تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos^2(x)-\sin^2(x)\cos(3x)=1$، در فاصلهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

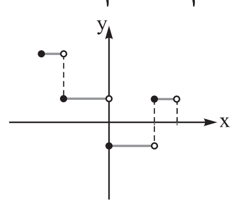
۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

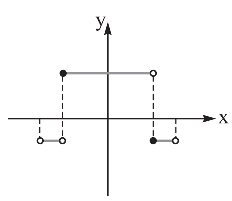
۱۳۲- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\log_4(x^2-x-2)}{\sqrt{x^2-1}+1}$ کدام است؟

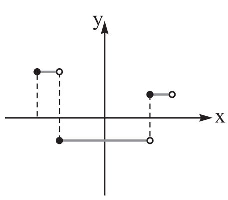
۱) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ ۴) $(-2,1)$

۱۳۳- نمودار تابع $y=2|[3x]|-1$ به ازای $-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۱۳۴- فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی منحنی‌های $2y=x^2$ و $x=\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3}$ با مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{15}$

۱۳۵- اگر $52=\frac{3^x+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}+3^{x+4}+3^{x+5}}{2^{x-2}+2^{x-1}+2^x+2^{x+1}+2^{x+2}+2^{x+3}}$ باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۳۶- نمودار تابع $y=2^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور xها در جهت مثبت و سپس $\frac{3}{2}$ در امتداد محور yها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور xها در فاصلهٔ $[0,\pi]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۳۷- اگر تساوی $\log_x y-2\log_y x=1$ به ازای $x,y>1$ برقرار باشد، کدام تساوی درست است؟

۱) $y=x^2$ ۲) $y=x^3$ ۳) $y=\sqrt{x}$ ۴) $xy=2$

۱۳۸- مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}}\right)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۱۳۹- مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}^-} [2\sin x - 1]$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱− ۲) صفر ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۱۴۰- قرینهٔ نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳− ۳) ۲− ۴) ۴−

۱۴۱- فرض کنید $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ و $f(x) = 1 - x^2$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع gof کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴۲- تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} |x^2 - 4|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۴۳- قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x) = x^2$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطهٔ A بین دو طول متوالی از محل تقاطع تابع f با نیمساز مورد نظر باشد، ماکزیمم طول پاره‌خط AA' کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{8}$

۱۴۴- فرض کنید $f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{2}])^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$. مقدار مشتق تابع fog در $x = \frac{3}{\sqrt{8}}$، چند برابر $(-128\sqrt{2})$ است؟

۱) ۴− ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۴۵- فرض کنید $g(x) = ax^2 + bx + c$، $(a \neq 0)$ و $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق‌پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b + c = a$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۴۶- حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $4\sqrt{2}$ محاط می‌شود، کدام است؟

۱) 32π ۲) 64π ۳) $\frac{256\pi}{3}$ ۴) $\frac{512\pi}{3}$

۱۴۷- احتمال این‌که یک دانش‌آموز در یک امتحان نمرهٔ قبولی بگیرد ۰/۹ و در دو امتحان متوالی نمرهٔ قبولی بگیرد ۰/۸۵ است. اگر دانش‌آموز در امتحان دوم موفق باشد، احتمال این‌که امتحان قبلی نیز موفق شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{8}{9}$ ۲) $\frac{85}{94}$ ۳) $\frac{17}{18}$ ۴) $\frac{45}{47}$

۱۴۸- فرض کنید $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$، چند معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت $ax^2 + bx - c = 0$ می‌توان تشکیل داد به طوری که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل‌ضرب ریشه‌های همان معادله، دو واحد بیشتر باشد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۱۴۹- در یک جلسهٔ آموزشی میزگردی شامل ۴ دانش‌آموز کلاس پایهٔ یازدهم و ۴ دانش‌آموز کلاس پایهٔ دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش‌آموزان در صندلی‌ها بنشینند به طوری که در کنار هر دانش‌آموزی، دانش‌آموز هم‌پایه قرار نگیرد؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۲۸۸ ۳) ۲۷۶ ۴) ۱۱۵۲

۱۵۰- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم که در آن رقم تکراری به کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعهٔ فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عضو انتخاب‌شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{13}{21}$ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۵۱- شیب نیم‌خطی با نقطهٔ شروع $A(2,4)$ برابر ۳ است. مستطیل ABCD را چنان می‌سازیم که نقطهٔ B روی نیم‌خط فوق و رأس سوم آن $C(-3,-1)$ باشد، محیط مستطیل کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۸ ۳) $6\sqrt{10}$ ۴) $3\sqrt{10}$

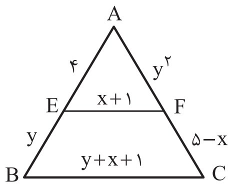
۱۵۲- نقطهٔ $H(۲,۱)$ را روی خط $۳x - y = ۵$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را با ارتفاع AH می‌سازیم به طوری که محیط مثلث $\sqrt{۲۷۰}$ واحد باشد، مختصات یک رأس A کدام است؟

۱) $(\frac{۷}{۲}, \frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{۱۳}{۲}, -\frac{۱}{۲})$ ۳) $(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$ ۴) $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱۱}{۶})$

۱۵۳- دایره‌های $x^۲ + y^۲ + ۲y = ۳$ و $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۳$ متقاطع‌اند. معادلهٔ وتر مشترک این دو دایره کدام است؟

۱) $x = y$ ۲) $x = ۱ + y$ ۳) $x = -y$ ۴) $x = ۱ - y$

۱۵۴- در شکل مقابل EF موازی BC است. مقدار $y - ۲x$ کدام است؟



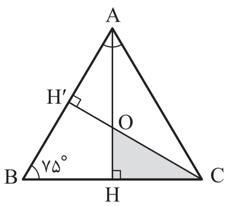
۱) -۴

۲) -۲

۳) ۲

۴) ۴

۱۵۵- در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AC برابر ۶ است. مساحت مثلث OHC کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) $\frac{۱۸}{۷ + ۴\sqrt{۳}}$

۴) $\frac{۹}{۷ + ۴\sqrt{۳}}$

ریاضی

۱۲۶- گزینهٔ ۴ داخل پرانتزها اتحاد مربع دوجمله‌ای است:

$$(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2$$

$$=\underbrace{(a-b)^4(a+b)^4}_{\text{مزدوج}}=(a^2-b^2)^4$$

حالا $(a^2-b^2)^4$ را به شکل $(a^4+b^4-2a^2b^2)^2$ می‌نویسیم:

$$a=\sqrt[4]{\sqrt{6}-2},\ b=\sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$$

$$\Rightarrow (a^4+b^4-2a^2b^2)^2$$

$$=(\sqrt{6}-2+\sqrt{6}+2-2\sqrt{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)})^2$$

$$=(2\sqrt{6}-2\sqrt{6-4})^2=(2(\sqrt{6}-\sqrt{2}))^2$$

$$=4(6+2-2\sqrt{12})=4(8-4\sqrt{3})=16(2-\sqrt{3})$$

۱۲۷- گزینهٔ ۴ اول دو طرف معادله را بر $\sqrt[3]{x}$ تقسیم می‌کنیم:

$$(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1)\ (\sqrt[3]{x^2}-1)=2\sqrt[3]{x}$$

این دوتا را تقسیم می‌کنیم.

$$\xrightarrow{\div\sqrt[3]{x}}\underbrace{(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1)}_{a^2+b^2+ab}\underbrace{(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}})}_{a-b}=2$$

حالا به اتحاد a^3-b^3 رسیدیم، پس:

$$\Rightarrow x-\frac{1}{x}=2\Rightarrow\frac{x^2-1}{x}=2\Rightarrow x^2-1=2x$$

$$\Rightarrow x^2-2x-1=0$$

مجموع ریشه‌های معادله را می‌خواهیم که می‌شود:

$$-\frac{b}{a}=-\frac{-2}{1}=2$$

۱۲۸- گزینهٔ ۱ اول سعی می‌کنیم در معادلهٔ $x=5-x^2$ عبارتی شبیه به $\frac{1}{(x_1+1)^3}$ یا $\frac{1}{(x_2+1)^3}$ بسازیم:

$$x^2+x=5\xrightarrow{\div x}x+1=\frac{5}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}}\frac{1}{x+1}=\frac{x}{5}\Rightarrow\frac{1}{(x+1)^3}=\frac{x^3}{125}$$

حالا باید معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش $\frac{x_1^3}{125}$ و $\frac{x_2^3}{125}$ باشد، S و P معادلهٔ جدید را پیدا می‌کنیم: (S و P معادلهٔ $x^2+x-5=0$ برابرند با $S=-1$ و $P=-5$)

$$S_2=\frac{x_1^3}{125}+\frac{x_2^3}{125}=\frac{S^3-3PS}{125}=\frac{(-1)^3-3(-5)(-1)}{125}$$

$$=-\frac{16}{125}$$

$$P_2=\frac{x_1^3}{125}\times\frac{x_2^3}{125}=\frac{P^3}{125^2}=\frac{(-5)^3}{125^2}=\frac{-125}{125^2}=-\frac{1}{125}$$

پس معادلهٔ خواسته‌شده عبارت است از:

$$x^2-S_2x+P_2=0\Rightarrow x^2+\frac{16}{125}x-\frac{1}{125}=0$$

$$\xrightarrow{\times125}125x^2+16x=1$$

۱۲۹- گزینهٔ ۴ به جای x می‌گذاریم $\frac{\pi}{36}$:

$$f(x)=16\cos^2(3x)\cos^2(6x)\cos^2(12x)\cos^2(24x)$$

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{36})=16\cos^2\frac{\pi}{12}\cos^2\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{36})=16\cos^2\frac{\pi}{12}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$$

مقدار $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ را هم قرار است بلد باشیم، پس:

$$f(\frac{\pi}{36})=16\times\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4^2}\times\frac{3}{64}=(8+2\sqrt{12})\times\frac{3}{64}$$

$$=(8+4\sqrt{3})\times\frac{3}{64}=\frac{3}{64}\times4(2+\sqrt{3})=\frac{3}{16}(2+\sqrt{3})$$

$$=\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

۱۳۰- گزینهٔ ۲

$$\frac{\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})+\cos(\alpha+\pi)}{\cot2\alpha}=\frac{\sin2\alpha-\cos\alpha}{\cot2\alpha}$$

$$=\tan2\alpha(\sin2\alpha-\cos\alpha)$$

α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی است و $\tan\alpha=\frac{3}{4}$، مقدار هر کدام از نسبت‌های مثلثاتی خواسته‌شده را پیدا می‌کنیم:

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\Rightarrow\tan2\alpha=\frac{2(\frac{3}{4})}{1-\frac{9}{16}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}=\frac{24}{7}$$

$$\sin2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\Rightarrow\sin2\alpha=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{16}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{16}}=\frac{24}{25}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha\Rightarrow\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{25}{16}\xrightarrow[\text{سوم}]{\text{در ناحیهٔ }\alpha}\cos\alpha=-\frac{4}{5}$$

حالا حاصل عبارت را پیدا می‌کنیم:

$$\tan2\alpha(\sin2\alpha-\cos\alpha)=\frac{24}{7}(\frac{24}{25}+\frac{4}{5})=\frac{24}{7}\times\frac{24+20}{25}$$

$$=\frac{24}{7}\times\frac{44}{25}=\frac{1056}{175}$$

۱۳۱- گزینهٔ ۳ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cos^2x-\sin^2x\cos3x=1$$

$$\Rightarrow -\sin^2x\cos3x=1-\cos^2x$$

$$\Rightarrow -\sin^2x\cos3x-\sin^2x=0$$

$$\Rightarrow -\sin^۲ x(\cos ۳x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}\sin^۲ x=۰\\ \cos ۳x=-۱\end{cases}$$

حالا جواب‌های $\sin^۲ x=۰$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ برابرند با صفر، π و ۲π و در مورد $\cos ۳x=-۱$ هم داریم:

$$\cos ۳x=-۱ \Rightarrow ۳x=۲k\pi+\pi \Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{جواب‌های بین } [۰,۲\pi]} \frac{\pi}{۳},\pi,\frac{۵\pi}{۳}$$

پس در کل، جواب‌ها عبارت‌اند از صفر، π، ۲π، $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۳}$ که می‌شوند پنج‌تا.

۱۳۲- گزینهٔ ۱ **عددگذاری:** به ازای $x=۰$ زیر رادیکال منفی می‌شود، پس ۲ و ۴ حذف می‌شوند. به ازای $x=۲$ هم جلوی لگاریتم صفر می‌شود، پس ۳ هم حذف می‌شود و ۱ جواب است.

روش ۲ در تابع $f(x)=\frac{\log_۴(x^۲-x-۲)}{\sqrt{x^۲-۱}+۱}$ با توجه به لگاریتم باید داشته باشیم:

$x^۲-x-۲>۰ \Rightarrow$

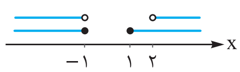
x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
		+		−		+	

$\Rightarrow x<-۱$ یا $x>۲$

و با توجه به رادیکال باید $x^۲-۱\ge ۰$ باشد، پس:

$x^۲-۱\ge ۰\Rightarrow x\le -۱$ یا $x\ge ۱$

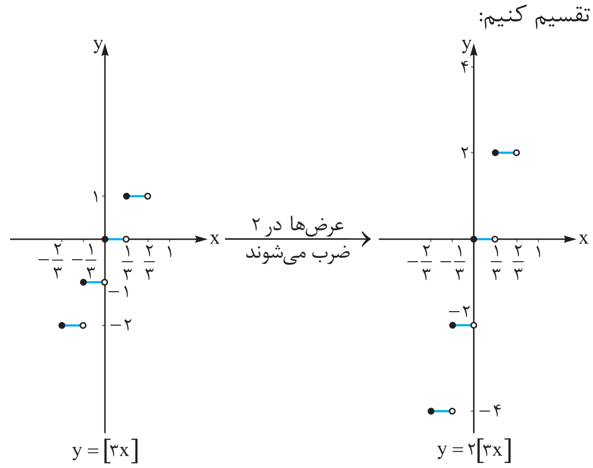
و با اشتراک این دو داریم:

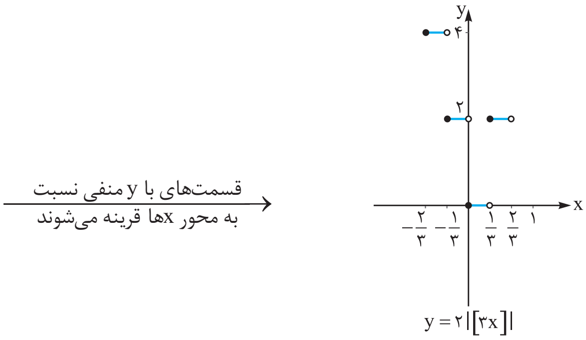


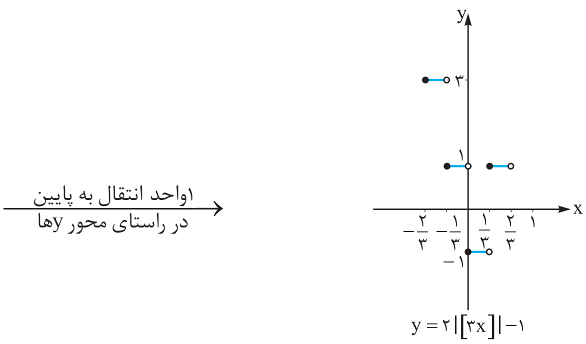
$\Rightarrow (-\infty,-۱)\cup(۲,+\infty)$

۱۳۳- گزینهٔ ۲ **عددگذاری:** در تابع $y=۲|[۳x]|-۱$ به ازای $x=۰$ داریم $y=-۱$ و به ازای $x=-۰/۱$ داریم $y=۱$ که فقط به ۲ می‌خورد.

راه دوم به ترتیب نمودار تابع‌های $y=[۳x]$، $y=۲[۳x]$، $y=۲|[۳x]|$ و $y=۲|[۳x]|-۱$ را رسم می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع $y=[۳x]$ باید محور xها را به بازه‌هایی به طول $\frac{۱}{۳}$ تقسیم کنیم:







۱۳۴- گزینهٔ ۴ از $x^۲=۲y$ داریم $x=\sqrt{۲y}$، پس:

$$x=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}\Rightarrow \sqrt{۲y}=\sqrt{y+۳}-\sqrt{y-۳}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲y=y+۳+y-۳-۲\sqrt{(y+۳)(y-۳)}$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{y^۲-۹}=۰\Rightarrow y=۳,y=-۳$$

با توجه به $\sqrt{y-۳}$ مقدار $y=-۳$ غیر قابل قبول است، پس:

$$y=۳\Rightarrow x^۲=۶\Rightarrow x=\sqrt{۶}$$

پس نقطهٔ تلاقی دو منحنی $A(\sqrt{۶},۳)$ است که فاصله‌اش از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA=\sqrt{x^۲+y^۲}\Rightarrow OA=\sqrt{۶+۹}=\sqrt{۱۵}$$

۱۳۵- گزینهٔ ۲ در صورت کسر از ۳^x و در مخرج کسر از $۲^{x-۲}$ فاکتور می‌گیریم:

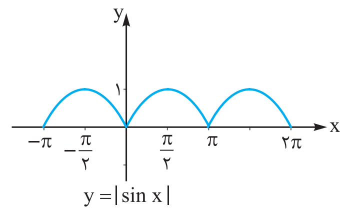
$$\frac{۳^x+۳^{x+۱}+۳^{x+۲}+۳^{x+۳}+۳^{x+۴}+۳^{x+۵}}{۲^{x-۲}+۲^{x-۱}+۲^x+۲^{x+۱}+۲^{x+۲}+۲^{x+۳}}$$

$$=\frac{۳^x(۱+۳+۹+۲۷+۸۱+۲۴۳)}{۲^{x-۲}(۱+۲+۴+۸+۱۶+۳۲)}$$

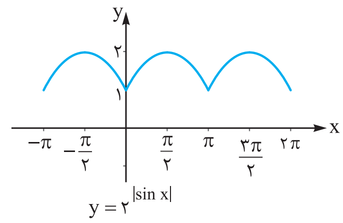
پس داریم:

$$\frac{۳^x}{۲^x}\times\frac{\overbrace{۳۶۴}^{۵۲\times۷}}{\frac{۱}{۴}\times\underbrace{۶۳}_{۹\times۷}}=۵۲\Rightarrow (\frac{۳}{۲})^x=\frac{۹}{۴}\Rightarrow x=۲$$

۱۳۶- گزینهٔ ۳ نمودار تابع $y=۲^{|\sin x|}$ را با استفاده از نمودار تابع $y=|\sin x|$ رسم می‌کنیم. (کافی است اول نمودار تابع $y=۲^{|\sin x|}$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ با توجه به مقدار $\sin x$ در نقاط $x=۰$ و $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\pi$ رسم کنیم و سپس با توجه به متناوب‌بودن تابع نمودار را تکرار کنیم.)



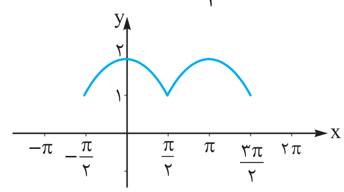
$\Rightarrow$



حالا تغییرات گفته‌شده در سؤال را اعمال می‌کنیم:

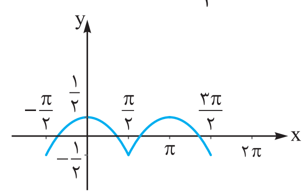
انتقال به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ در جهت مثبت محور x ها

$\Rightarrow$



انتقال به اندازهٔ $\frac{3}{2}$ در جهت منفی محور y ها

$\Rightarrow$



حالا نمودار آخر، محور x ها را در بازهٔ $[0,\pi]$، در دو نقطه قطع می‌کند.

۱۳۷- گزینهٔ ۱ می‌دانیم $\log_y x=\frac{1}{\log_x y}$، پس:

$$\log_x y-2\log_y x=1 \Rightarrow \log_x y-\frac{2}{\log_x y}=1$$

حالا اگر فرض کنیم $\log_x y=t$، داریم:

$$t-\frac{2}{t}=1 \Rightarrow t^2-t-2=0 \xrightarrow{a+c=b} t=-1, t=2$$

از $t=-1$ داریم:

$$t=-1 \Rightarrow \log_x y=-1 \Rightarrow y=x^{-1} \Rightarrow y=\frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow xy=1$$

که با فرض $x,y>1$ متناقض است، پس:

$$t=2 \Rightarrow \log_x y=2 \Rightarrow y=x^2$$

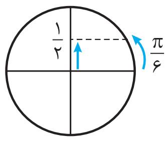
۱۳۸- گزینهٔ ۴ اول عبارت‌های زیر رادیکال را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x(x+1)}}-\underbrace{\sqrt{\frac{1}{x^2(x^2+1)}}}_{\text{حد}=0}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^2+x}{x^2+x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}}=\sqrt{2}$$

۱۳۹- گزینهٔ ۱ با توجه به دایرهٔ مثلثاتی مشخص است که وقتی $x\to\frac{\pi}{6}^-$ داریم $\sin x\to(\frac{1}{2})^-$، پس:



$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}[2\sin x-1]=[2(\frac{1}{2})^- -1]=[1^- -1]=[0^-]=-1$$

۱۴۰- گزینهٔ ۳ تغییرات گفته‌شده را روی ضابطهٔ تابع اعمال می‌کنیم:

$$y=2+\sqrt{x-1} \xrightarrow[\text{خط } y=x]{\text{تقارن نسبت به}} x=2+\sqrt{y-1}$$

$$\xrightarrow[\text{مرتب می‌کنیم}]{\text{برحسب } y} y=(x-2)^2+1$$

حالا ۲ واحد در جهت مثبت در راستای محور x ها $(x\to(x-2))$ و ۳ واحد در جهت منفی در راستای محور y ها انتقال می‌دهیم:

$$y=(x-2-2)^2+1-3 \Rightarrow y=(x-4)^2-2$$

پس $g(x)=(x-4)^2-2$ و در نتیجه:

$$g(4)=(4-4)^2-2=-2$$

۱۴۱- گزینهٔ ۳ تابع $g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ فقط در $x=0$ ناپیوسته است و چون تابع $f(x)=1-x^2$ در تمام نقاط پیوسته است، پس تابع $g(f(x))$ هم در نقاطی ناپیوسته است که $f(x)=0$ شود. یعنی: $1-x^2=0 \Rightarrow x=1, x=-1$

پس تعداد نقاط ناپیوستگی دوتاست.

۱۴۲- گزینهٔ ۲ در تابع $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}|x^2-4|$ در مورد بحرانی و اکسترمم بودن $x=0$، $x=2$ و $x=-2$ مطمئنیم. چون اولاً $x=0$ ریشهٔ مرتبهٔ ۲ تابع است و ثانیاً تابع در $x=2$ و $x=-2$ نقاط گوشه‌ای دارد پس فعلاً ۳ نقطهٔ اکسترمم نسبی داریم. برای اطمینان از این‌که نقطهٔ دیگری نداشته باشیم، مشتق تابع را (با فرض مثبت‌بودن داخل قدرمطلق) پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1}=\frac{x^4-4x^2}{x^2-1}$$

$$f'(x)=\frac{(4x^3-8x)(x^2-1)-(2x)(x^4-4x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{4x^5-4x^3-8x^3+8x-2x^5+8x^3}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{2x^5-4x^3+8x}{(x^2-1)^2}=\frac{x(2x^4-4x^2+x)}{(x^2-1)^2}$$

عبارت $2x^4-4x^2+8$ ریشه ندارد و تنها جواب مشتق $x=0$ است، پس نقطهٔ بحرانی دیگری نداریم و تعداد نقاط اکسترمم می‌شود همان ۳ تا.

۱۴۳- گزینهٔ ۳ اگر طول نقطهٔ A را برابر α فرض کنیم:

$$f(x)=x^2 \Rightarrow A(\alpha,\alpha^2) \xrightarrow[\text{به خط } y=x]{\text{تقارن نسبت}} A'(\alpha^2,\alpha)$$

و طول پاره‌خط AA' برابر است با:

$$AA'=\sqrt{(\alpha-\alpha^2)^2+(\alpha^2-\alpha)^2}=\sqrt{2(\alpha-\alpha^2)^2}$$
$$=\sqrt{2}\,|\alpha-\alpha^2|$$

و چون نقطهٔ A بین دو نقطهٔ تقاطع سهمی و خط نیمساز است، یعنی $0<\alpha<1$ پس $\alpha-\alpha^2>0$ و در نتیجه $AA'=\sqrt{2}(\alpha-\alpha^2)$، حالا ماکزیمم AA' را می‌خواهیم:

راه اول ماکزیمم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c با شرط $a<0$ از $x=-\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید:

$$\alpha=-\frac{1}{2(-1)}=\frac{1}{2}\Rightarrow AA'=\sqrt{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

راه دوم ماکزیمم عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c با شرط $a<0$ برابر است با $-\frac{\Delta}{4a}$:

$$\max(AA')=\sqrt{2}\times-\frac{1}{4(-1)}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۴۴- گزینهٔ ۴

می‌دانیم $(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$ پس باید $g'(\frac{3}{\sqrt{8}})$ و $f'(g(\frac{3}{\sqrt{8}}))$ را پیدا کنیم:

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}=(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}(2x)=-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

$$\Rightarrow g'(\frac{3}{\sqrt{8}})=-\frac{2\frac{3}{\sqrt{8}}}{3\sqrt[3]{(\frac{9}{8}-1)^4}}=-\frac{\frac{2\times 3}{\sqrt{8}}}{3(\frac{1}{2})^4}=-\frac{32}{\sqrt{8}}$$

$$=\frac{-32}{2\sqrt{2}}=-\frac{16}{\sqrt{2}}$$

و چون:

$$g(\frac{3}{\sqrt{8}})=\frac{1}{\sqrt[3]{(\frac{9}{8}-1)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}=2$$

پس باید $f'(2)$ را پیدا کنیم:

$$f(x)=(x\overbrace{[x^2+\frac{1}{2}]}^{[4+\frac{1}{2}]=4})^2+1 \Rightarrow f(x)=(4x)^2+1$$

$$\Rightarrow f'(x)=32x\Rightarrow f'(2)=32\times 2=64$$

بنابراین $(fog)'(\frac{3}{\sqrt{8}})$ برابر است با:

$$(fog)'(\frac{3}{\sqrt{8}})=g'(\frac{3}{\sqrt{8}})f'(2)=-\frac{16}{\sqrt{2}}\times 64=-8\sqrt{2}\times 64$$
$$=(-128\sqrt{2})\times 4$$

پس حاصل مشتق ۴ برابر $(-128\sqrt{2})$ است.

۱۴۵- گزینهٔ ۳ با توجه به تابع $g(x)=ax^2+bx+c$ ضابطهٔ تابع f به شکل $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c & x\ge k\\ 2ax+b & x<k\end{cases}$ است.

حالا برای این‌که تابع f مشتق‌پذیر باشد:

راه اول با استفاده از شرط پیوستگی و مشتق‌پذیری باید معادلهٔ $ak^2+bk+c=2ak+b$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد. چون $b+c=a$ است، پس $c=a-b$ و در نتیجه:

$$ak^2+bk+a-b=2ak+b$$

$$\Rightarrow ak^2+(b-2a)k+a-2b=0$$

ریشهٔ مضاعف $\Delta=0 \Rightarrow (b-2a)^2-4a(a-2b)=0$

$$\Rightarrow b^2-4ab+4a^2-4a^2+8ab=0 \Rightarrow b^2+4ab=0$$

$\Rightarrow b(b+4a)=0 \Rightarrow b=0$ یا $b=-4a$

پس معادله به شکل زیر درمی‌آید:

$$b=0\Rightarrow ak^2-2ak+a=0\Rightarrow a(k^2-2k+1)=0$$

$\Rightarrow$ ریشهٔ مضاعف $k=1$

$$b=-4a \Rightarrow ak^2-6ak+9a=0$$

$\Rightarrow a(k^2-6k+9)=0 \Rightarrow$ ریشهٔ مضاعف $k=3$

بنابراین حداکثر مقدار k برابر است با $k=3$.

راه دوم تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c & x\ge k\\ 2ax+b & x<k\end{cases}$ باید در $x=k$ هم پیوسته باشد و هم مشتق‌پذیر، پس:

پیوستگی $\Rightarrow ak^2+bk+c=2ak+b$ (۱)

مشتق‌پذیری $f'(x)=\begin{cases}2ax+b & x>k\\ 2a & x<k\end{cases}$

$\Rightarrow 2ak+b=2a$ (۲)

با مقایسهٔ (۱) و (۲) می‌توانیم بنویسیم:

$$ak^2+bk+c=2a \Rightarrow ak^2+bk+c-2a=0$$

مجموع ضرایب این معادله برابر است با $a+\overbrace{b+c}^{a}-2a=2a-2a=0$

پس ریشه‌هایش برابرند با $k=1$ و $k=\frac{c-2a}{a}$.

از طرف دیگر این ریشه‌ها باید در معادلهٔ (۲) هم صدق کنند:

$$2a(\frac{c-2a}{a})+\overbrace{b}^{a-c}=2a\Rightarrow 2c-4a+a-c=2a$$

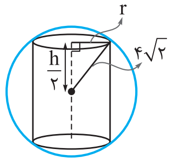
$$\Rightarrow c=5a$$

پس $\frac{c}{a}=5$ و در نتیجه مقدار ریشهٔ $k=\frac{c-2a}{a}$ برابر است با:

$$k=\frac{c}{a}-2=5-2=3$$

پس حداکثر k برابر است با $k=3$.

۱۴۶- گزینهٔ ۲ در شکل روبه‌رو داریم:



مثلث قائم‌الزاویه: $\frac{h^2}{4}+r^2=(4\sqrt{2})^2 \Rightarrow \frac{h^2}{4}+r^2=32$

و مساحت جانبی استوانه برابر است با: $S=2\pi rh$

می‌خواهیم $2\pi rh$ ماکزیمم شود پس باید $r^2=\frac{h^2}{4}=16$ باشد:

$$\left.\begin{array}{l} r^2=16 \Rightarrow r=4 \\ \frac{h^2}{4}=16 \Rightarrow h^2=64 \Rightarrow h=8 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \max(S)=2\pi(4)(8)=64\pi$$

۱۴۷- گزینهٔ ۳ اگر امتحان اول A و امتحان دوم B باشد، سؤال می‌گوید:

$$P(A)=P(B)=0/9$$
$$P(A\cap B)=0/85$$

و می‌خواهیم $P(A|B)$ را پیدا کنیم:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0/85}{0/9}=\frac{85}{90}=\frac{17}{18}$$

۱۴۸- گزینهٔ ۳ می‌خواهیم ضرایب معادلهٔ $ax^2+bx-c=0$ را از مجموعهٔ $\{1,2,\dots,9\}$ انتخاب کنیم (حواسمان هست که به علت $-c$، علامت Δ حتماً مثبت است!) و مجموع ریشه‌های معادله باید از حاصل‌ضرب ریشه‌ها دو واحد بیشتر باشد:

$$-\frac{b}{a}=-\frac{c}{a}+2 \Rightarrow \frac{c-b}{a}=2 \Rightarrow c-b=2a$$

بنابراین a، b و c باید طوری انتخاب شوند که $c-b$ یک عدد زوج باشد یعنی باید یا b و c هر دو فرد و یا b و c هر دو زوج باشند:

c,b هر دو فرد $\Rightarrow \{1,3,5,7,9\}$

تعداد راه‌های انتخاب: $\binom{5}{2}=10$

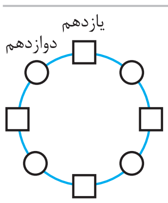
c,b هر دو زوج $\Rightarrow \{2,4,6,8\}$

تعداد راه‌های انتخاب: $\binom{4}{2}=6$

و چون «یا» داشتیم پس تعداد کل حالت‌ها می‌شود (اصل جمع)

$$10+6=16$$

۱۴۹- گزینهٔ ۱ **راه اول** ۴ نفر اول دانش‌آموز پایهٔ یازدهم را دور میز می‌نشانیم. چون مسیر دایره‌ای است تعداد حالت‌ها می‌شود $3!=(4-1)!$.



حالا چهار دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم می‌توانند به $4!$ در مکان‌های خالی بین هر دو دانش‌آموز یازدهم بنشینند، پس تعداد حالت‌ها می‌شود:

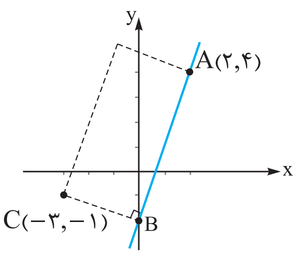
$$3!\times 4!=6\times 24=144$$

راه دوم اگر مسیر مستقیم بود، $2\times 4!\times 4!$ حالت داشتیم و حالا که مسیر دایره‌ای است نفر اول نداریم پس برای نفر اول که می‌تواند هر کدام از این ۸ نفر باشد، ۸ حالت داریم یعنی باید $2\times 4!\times 4!$ را بر ۸ تقسیم کنیم:

$$\frac{2\times 4!\times 4!}{8}=\frac{2\times 24\times 24}{8}=6\times 24=144$$

۱۵۰- گزینهٔ ؟ وقتی با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ یک عدد طبیعی می‌سازیم، اگر عدد ۱ رقمی باشد که فقط ۴ بر عدد ۴ بخش‌پذیر است. پس احتمالش برابر است با $\frac{1}{5}$، در حالت‌های دیگر که اعداد دورقمی، سه‌رقمی، چهاررقمی یا پنج‌رقمی می‌سازیم عدد ساخته‌شده وقتی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقم سمت راستش بر ۴ بخش‌پذیر باشد یعنی ۱۲، ۲۴، ۳۲ یا ۵۲ باشد پس احتمال این حالت هم برابر است با $\frac{4}{5\times 4}=\frac{1}{5}$، پس در کل احتمال این‌که عدد انتخاب‌شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد برابر است با $\frac{1}{5}$، متأسفانه پاسخ درست در گزینه‌ها نیست!

۱۵۱- گزینهٔ ۳ معادلهٔ خطی که از $A(2,4)$ با شیب ۳ می‌گذرد عبارت است از $y=3x-2$ پس اگر طول نقطهٔ B برابر a باشد، داریم $B(a,3a-2)$، از طرف دیگر $AB\perp BC$، پس:



$$m_{AB}=3 \Rightarrow m_{BC}=-\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{B(a,3a-2),C(-3,-1)} \frac{3a-2+1}{a+3}=-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 9a-3=-a-3 \Rightarrow a=0$$

پس داریم $B(0,-2)$ و در نتیجه:

$$A(2,4),B(0,-2) \Rightarrow AB=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

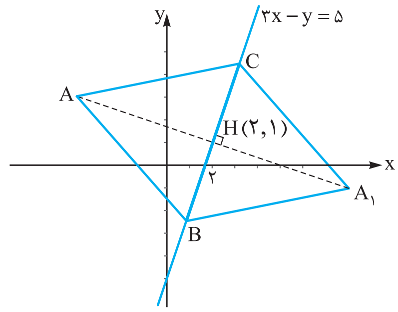
$$B(0,-2),C(-3,-1) \Rightarrow BC=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

پس محیط مستطیل برابر است با:

$$\text{محیط}=2(AB+BC)=2(2\sqrt{10}+\sqrt{10})=6\sqrt{10}$$

۱۵۲- گزینهٔ ۲ در شکل مقابل محیط مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر است با $\sqrt{270}=3\sqrt{30}$. پس اندازهٔ ضلع مثلث برابر است با $\sqrt{30}$ و در نتیجه اندازهٔ ارتفاع AH برابر است با:

$$AH=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{30}=\frac{\sqrt{90}}{2}=\sqrt{\frac{90}{4}}$$



بنابراین گزینه‌ای برای A قابل قبول است که اولاً $AH \perp BC$ (یعنی $m_{AH}=-\frac{۱}{۳}$) و ثانیاً $AH=\sqrt{\frac{۹۰}{۴}}$ باشد، گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) $A(\frac{۷}{۲},\frac{۱}{۲}),H(۲,۱)$

$$m_{AH}=\frac{۱-\frac{۱}{۲}}{۲-\frac{۷}{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{-\frac{۳}{۲}}=-\frac{۱}{۳}\ \checkmark$$

$$AH=\sqrt{(\frac{۷}{۲}-۲)^۲+(\frac{۱}{۲}-۱)^۲}=\sqrt{\frac{۹}{۴}+\frac{۱}{۴}}=\sqrt{\frac{۱۰}{۴}}\ \times$$

(۲) $A(\frac{۱۳}{۲},-\frac{۱}{۲}),H(۲,۱)$

$$m_{AH}=\frac{۱-(-\frac{۱}{۲})}{۲-\frac{۱۳}{۲}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۹}{۲}}=-\frac{۱}{۳}\ \checkmark$$

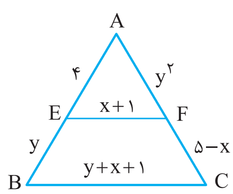
$$AH=\sqrt{(\frac{۱۳}{۲}-۲)^۲+(-\frac{۱}{۲}-۱)^۲}=\sqrt{\frac{۸۱}{۴}+\frac{۹}{۴}}=\sqrt{\frac{۹۰}{۴}}\ \checkmark$$

پس جواب (۲) است.

۱۵۳- گزینهٔ ۱ می‌دانیم برای پیداکردن معادلهٔ وترمشترک دو دایره کافی است $x^۲$ و $y^۲$ را از بین معادلهٔ دو دایره حذف کنیم (دو معادله را از هم کم می‌کنیم).

$$\begin{cases}x^۲+y^۲+۲y=۳\\x^۲+y^۲+۲x=۳\end{cases}\xrightarrow{(-)}۲y-۲x=۰\Rightarrow y=x$$

۱۵۴- گزینهٔ ۱ $EF \parallel BC$ است، پس دو مثلث متشابه‌اند.
نسبت تشابه را می‌نویسیم: (یا همان نسبت جزء‌به‌کل)



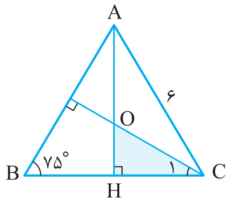
$$\frac{۴}{y+۴}=\frac{\overbrace{x+۱}^{۴}}{y+\underbrace{x+۱}_{۴}}$$

در تساوی بالا اگر $x+۱=۴$ باشد، تساوی درست است پس $x=۳$، از طرف دیگر:

$$\frac{۴}{y}=\frac{y^۲}{۵-x}\xrightarrow{x=۳}\frac{۴}{y}=\frac{y^۲}{۲}\Rightarrow y^۳=۸\Rightarrow y=۲$$

بنابراین مقدار $y-۲x$ برابر است با: $۲-۲(۳)=-۴$

۱۵۵- گزینهٔ ۲ **راه اول** در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC داریم $\hat{C}=۷۵^\circ$، پس:



$$\cos ۷۵^\circ=\frac{HC}{۶}\Rightarrow HC=۶\times\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}=\frac{۳(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})}{۲}$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHC داریم $\hat{C}_۱=۱۵^\circ$، پس:

$$\tan ۱۵^\circ=\frac{OH}{HC}\Rightarrow ۲-\sqrt{۳}=\frac{OH}{\frac{۳}{۲}(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})}$$

$$\Rightarrow OH=\frac{۳}{۲}(۲-\sqrt{۳})(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$$

حالا مساحت مثلث OHC را پیدا می‌کنیم:

$$S=\frac{۱}{۲}OH\times CH$$

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})\times\frac{۳}{۲}(۲-\sqrt{۳})(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})$$

برای رسیدن به گزینهٔ درست، عبارت‌های رادیکالی را گویا می‌کنیم:

$$\sqrt{۶}-\sqrt{۲}=\frac{۶-۲}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}$$

$$۲-\sqrt{۳}=\frac{۴-۳}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}$$

پس:

$$S=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}\times\frac{۴}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}\times\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲+\sqrt{۳}}\times\frac{۴}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}$$

$$=\frac{۱۸}{(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۲(۲+\sqrt{۳})}=\frac{۱۸}{(۶+۲+۴\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}$$

$$=\frac{۱۸}{۴(۲+\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})}=\frac{۹}{۲(۴+۳+۴\sqrt{۳})}$$

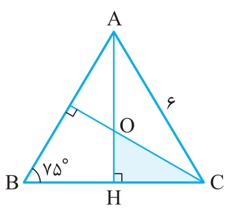
$$=\frac{۹}{۲(۷+۴\sqrt{۳})}$$

راه دوم در مثلث ABC داریم:

$\hat{B}=\hat{C}=۷۵^\circ$

$\hat{A}=۳۰^\circ$

پس:



با استفاده از رابطهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}\Rightarrow\frac{BC}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{۶}{\sin ۷۵^\circ}$$

و چون $\sin ۷۵^\circ=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$، پس:

$$BC=\frac{۳}{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}}=\frac{۱۲}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}$$

بنابراین:

$$HC=\frac{BC}{۲}=\frac{۶}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}$$

از طرف دیگر در مثلث OHC داریم $\hat{C} = ۱۵^\circ$ و $\hat{O} = ۷۵^\circ$، پس باز هم طبق رابطهٔ سینوس‌ها داریم:

$$\frac{HC}{\sin O} = \frac{OH}{\sin C} \Rightarrow \frac{\frac{۶}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}}{\sin ۷۵^\circ} = \frac{OH}{\sin ۱۵^\circ}$$

و چون $\sin ۷۵^\circ = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$ و $\sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$، پس:

$$OH = \frac{\frac{۶}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}}{\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}} = \frac{۶(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})}{(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۲}$$

حالا مساحت مثلث OHC را پیدا می‌کنیم:

$$S = \frac{۱}{۲} HC \times OH \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times \frac{۶}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}} \times \frac{۶(\sqrt{۶}-\sqrt{۲})}{(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۲}$$

برای ساده‌کردن عبارت $\sqrt{۶}-\sqrt{۲}$ را با اتحاد مزدوج گویا می‌کنیم:

$$S = \frac{۱}{۲} \times \frac{۶}{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}} \times \frac{۶ \times (۶-۲)}{(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۳} = \frac{۷۲}{(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۴}$$

حالا مقدار $(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۴$ را پیدا می‌کنیم:

$$(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۴ = (۶+۲+۲\sqrt{۱۲})^۲ = (۸+۴\sqrt{۳})^۲$$
$$= ۱۶(۲+\sqrt{۳})^۲ = ۱۶(۴+۳+۴\sqrt{۳}) = ۱۶(۷+۴\sqrt{۳})$$

پس مساحت مثلث برابر است با:

$$S = \frac{۷۲}{(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۴} = \frac{۷۲}{۱۶(۷+۴\sqrt{۳})} = \frac{۹}{۲(۷+۴\sqrt{۳})}$$

خیلی سبز!

۱۴۰۰

خارج از کشور

دفترچه شماره ۲
آزمون اختصاصی

ویژه نظام آموزشی ۳_۳_۶

آزمون سراسری ورودی دانشگاه های کشور - ۱۴۰۰

گروه آزمایشی علوم تجربی
آزمون اختصاصی

• نام و نام خانوادگی: • شماره داوطلبی:

• تعداد سؤال: ۱۷۰ • مدت پاسخگویی: ۱۷۵ دقیقه

عنوان مواد امتحانی آزمون، تعداد، شماره سؤالات و مدت پاسخگویی

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی
۱	زمین‌شناسی	۲۵	۱۰۱	۱۲۵	۲۰ دقیقه
۲	ریاضی	۳۰	۱۲۶	۱۵۵	۴۷ دقیقه
۳	زیست‌شناسی	۵۰	۱۵۶	۲۰۵	۳۶ دقیقه
۴	فیزیک	۳۰	۲۰۶	۲۳۵	۳۷ دقیقه
۵	شیمی	۳۵	۲۳۶	۲۷۰	۳۵ دقیقه

ریاضی

۱۲۶- فرض کنید $a=\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}$. مقدار $(a+\frac{۱}{a}-\sqrt{۲})^۲(a+\frac{۱}{a}+\sqrt{۲})^۲$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۶ ۳) ۲۵ ۴) ۴۹

۱۲۷- مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آن‌گاه حاصل‌ضرب پول‌های باقی‌ماندهٔ آن‌ها ۴۷۵ تومان خواهد شد. پول اولیهٔ اکرم کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۵ ۳) ۸۵ ۴) ۹۱

۱۲۸- فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x=x^۲-۴$ باشند. ریشه‌های کدام معادله $x_۱^۳+\frac{۱}{x_۲}$ و $x_۲^۳+\frac{۱}{x_۱}$ است؟

۱) $۴x^۲=۵۱x+۲۲۱$ ۲) $۴x^۲+۵۱x=۲۲۱$ ۳) $۴x^۲=۵۱x+۱۹۷$ ۴) $۴x^۲+۵۱x=۱۹۷$

۱۲۹- اگر $f(x)=۳۲\cos^۲(x)\cos^۲(۲x)\cos^۲(۴x)\cos^۲(۸x)\cos^۲(۱۶x)$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{۱۲})$ کدام است؟

۱) $\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۳۲}$ ۲) $\frac{۶+\sqrt{۲۷}}{۱۶}$ ۳) $\frac{۶-\sqrt{۲۷}}{۱۶}$ ۴) $\frac{۶-\sqrt{۲۷}}{۳۲}$

۱۳۰- فرض کنید زاویهٔ α در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی و $\cos(\alpha)=\frac{۲}{۳}$ باشد. حاصل عبارت $\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲})-\sin(\alpha-\pi)}{|\tan^۲(\alpha)-۱|}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴(۲+\sqrt{۵})}{۳}$ ۲) $\frac{۴(-۲+\sqrt{۵})}{۳}$ ۳) $\frac{۴(۲-\sqrt{۵})}{۳}$ ۴) $-\frac{۴(۲+\sqrt{۵})}{۳}$

۱۳۱- تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۵\sin^۲(x)+۲\cos(۳x)=-۲$، در فاصلهٔ $[-\pi,\pi]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۳۲- دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_۴(|x^۲-۲|-x)$ کدام است؟

۱) $(-\infty,-\sqrt{۲})\cup(۲,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۱)\cup(\sqrt{۲},+\infty)$

۳) $[-۱,۱)\cup(\sqrt{۲},+\infty)$ ۴) $(-\infty,۱)\cup(۲,+\infty)$

۱۳۳- تابع متناوب $f(x)=\begin{cases}x & ۰\le x\le ۱\\ ۲-x & ۱<x\le ۲\end{cases}$ را که دورهٔ تناوب آن ۲ است، در نظر بگیرید. مساحت ناحیهٔ محصور به منحنی f و محور x ها در بازهٔ $[-۰/۷۵,۳/۲۵]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

۱۳۴- فرض کنید M نقطهٔ تلاقی منحنی $y=\sqrt{x+۳}-۱$ با تابع وارون خود باشد. فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۳۵- از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۶ متر توپی را به زمین پرتاب می‌کنیم. توپ پس از هر بار برخورد به زمین به اندازهٔ ۰/۸ ارتفاع قبلی از زمین به صورت قائم بلند می‌شود. پس از صد بار برخورد به زمین، در مجموع، توپ تقریباً چند متر بالا و پایین رفته است؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۷ ۳) ۶۰ ۴) ۶۶

۱۳۶- تابع $y=۲^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور x ها در جهت منفی و سپس در امتداد محور y ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) $-\frac{۵}{۲}$ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

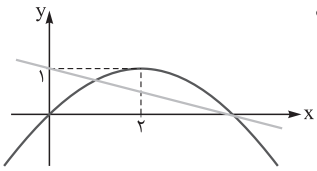
۱۳۷- اگر در معادلهٔ $۲\log_x a+\log_a\sqrt{x}=۲$، مقدار x برابر ۹ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۹

۱۳۸- مقدار $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۴-x^۲+۱}+\sqrt{x^۲+۱}-x^۲}{x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) ۱−

۱۳۹- نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است. مقدار $\lim\limits_{x \to ۴^-} \dfrac{f(x)+g(x)}{۴-x}$ کدام است؟



۱) $-\dfrac{۳}{۲}$ ۲) $-\dfrac{۵}{۴}$ ۳) $\dfrac{۵}{۴}$ ۴) $\dfrac{۳}{۲}$

۱۴۰- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟

۱) -۱۲ ۲) ۸ ۳) -۸ ۴) ۱۲

۱۴۱- فرض کنید $f(x)=x(۱-x^۲)$ و $g(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $(fof)og$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۴۲- مینیمم مطلق تابع $f(x)=x|۳-x^۲|$ در بازهٔ $[-۱/۵,\sqrt{۳}]$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۹}{۴}$ ۲) -۲ ۳) $-\sqrt{۳}$ ۴) $-\dfrac{۹}{۸}$

۱۴۳- قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر منحنی $f(x)=\sqrt[۳]{-x}$ را در دامنهٔ $[۰,۱]$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم صفحهٔ مختصات تعیین و آن را A' می‌نامیم. ماکزیمم طول پاره‌خط AA' کدام است؟

۱) $\dfrac{۲}{۳\sqrt{۶}}$ ۲) $\dfrac{۴}{۳\sqrt{۶}}$ ۳) $\dfrac{۲}{۳\sqrt{۲}}$ ۴) $\dfrac{۴}{۳\sqrt{۲}}$

۱۴۴- فرض کنید $f(x)=(x[x])^۳$ و $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^۲-۱}}$. مقدار مشتق چپ تابع fog در $x=\dfrac{\sqrt{۵}}{۲}$ چند برابر $(-۴۸\sqrt{۵})$ است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸

۱۴۵- فرض کنید $g(x)=ax^۲+۵x+b$. اگر $f(x)=\begin{cases} g(x) & x \le ۲ \\ g'(x) & x>۲ \end{cases}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $-\dfrac{۱۵}{۲}$ ۲) $-\dfrac{۵}{۲}$ ۳) $\dfrac{۵}{۲}$ ۴) $\dfrac{۱۵}{۲}$

۱۴۶- کوتاه‌ترین فاصلهٔ سهمی $y^۲=۴x$ از نقطهٔ $M(۳,۰)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\dfrac{۳}{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

۱۴۷- احتمال متولدشدن یک خرگوش نر در یک نسل در اولین دورهٔ بارداری مادر، ۷۰ درصد و احتمال متولدشدن دو خرگوش نر در دو بار متوالی زایمان ۶۰ درصد است. اگر دومین فرزند خرگوش، نر باشد، احتمال آن‌که در زایمان قبلی، خرگوش نر به دنیا آمده باشد، کدام است؟ (فرض بر این است که در هر دوره فقط یک تولد صورت می‌گیرد.)

۱) $\dfrac{۲۰}{۲۷}$ ۲) $\dfrac{۲}{۳}$ ۳) $\dfrac{۷}{۱۰}$ ۴) $\dfrac{۶}{۷}$

۱۴۸- فرض کنید $a,b,c \in \{۱,۲,...,۹\}$. چند معادلهٔ درجه‌دوم به صورت $ax^۲+bx-c=۰$ می‌توان نوشت که فاصلهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌های هر معادله با جمع ریشه‌های آن معادله، دو واحد باشد؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

۱۴۹- به چند طریق ۳ بازیکن فوتبال، ۲ بازیکن والیبال و ۳ شناگر دور یک میز بنشینند، به طوری که افراد هم‌تیمی کنار هم باشند؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۱۶ ۴) ۴۳۲

۱۵۰- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم که در هر عضو آن، رقم تکراری به کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعهٔ فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عضو انتخاب‌شده بر ۳ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\dfrac{۶۶}{۲۰۵}$ ۲) $\dfrac{۶۷}{۲۰۵}$ ۳) $\dfrac{۱۶۸}{۳۲۵}$ ۴) $\dfrac{۱۷۷}{۳۲۵}$

۱۵۱- سهمی $y=-x^{۲}+۲x+۱$ خط راست گذرا از نقطهٔ $(۱,۰)$ و با عرض از مبدأ -۱ را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، فاصلهٔ رأس سهمی از نقطهٔ M، کدام مضرب $\sqrt{۲۶}$ است؟

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

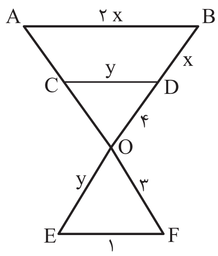
۱۵۲- نقاط B، C و $M(۳,۲)$ روی خط $x+۲y=۷$ قرار دارند. مثلث متساوی‌الساقین ABC را چنان می‌سازیم که اندازهٔ میانهٔ AM برابر $۵\sqrt{۵}$ واحد و BC قاعدهٔ مثلث باشد. طول مختصات یک رأس A کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۲ ۳) -۵ ۴) -۸

۱۵۳- دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+۲y=۳$ مفروض است. معادلهٔ دایره‌ای که با دایرهٔ قبلی مماس داخل بوده و از نقطهٔ $(۰,-۳)$ گذشته و شعاع آن با قطر دایرهٔ اصلی برابر باشد، کدام است؟

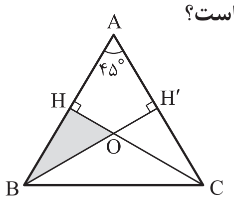
۱) $x^{۲}+y^{۲}-۴x=۳$ ۲) $x^{۲}+y^{۲}-۴y+۳=۰$ ۳) $x^{۲}+y^{۲}-۲x-۲y=۰$ ۴) $x^{۲}+y^{۲}+۴y+۳=۰$

۱۵۴- در شکل مقابل AB، CD و EF موازی‌اند. طول پاره‌خط AC کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۴}$
۲) $\frac{۴}{۳}$
۳) ۲
۴) ۳

۱۵۵- در شکل مقابل مثلث ABC متساوی‌الساقین و طول ساق AB برابر ۸ واحد است. مساحت مثلث OHB کدام است؟



۱) $\frac{۶}{۲+\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۸}{۲+\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۱۲}{۳+۲\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{۱۶}{۳+۲\sqrt{۲}}$

ریاضی

۱۲۶- گزینهٔ ۲ اول حاصل‌ضرب را با استفاده از اتحاد مزدوج ساده می‌کنیم:

$$(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2})^2(a+\frac{1}{a}-\sqrt{2})^2=((a+\frac{1}{a})^2-2)^2$$

راه اول حالا رادیکال مرکب $a=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$ را با استفاده از نکتهٔ زیر ساده می‌کنیم:

نکته

در رادیکال مرکب $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ اگر $A^2-B=C^2$ باشد، داریم:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

چون $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{7-\sqrt{48}}$ و $7^2-48=1$ داریم:

$$\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{\frac{7+1}{2}}-\sqrt{\frac{7-1}{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

و باز هم چون $2^2-3=1$، پس:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2+1}{2}}-\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

پس $a=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ و در نتیجه:

$$\frac{1}{a}=\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\overset{\text{گویا می‌کنیم}}{=\!=}\frac{2(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

حالا حاصل عبارت را پیدا می‌کنیم:

$$((a+\frac{1}{a})^2-2)^2=((\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})^2-2)^2$$
$$=((\sqrt{6})^2-2)^2=(6-2)^2=4^2=16$$

راه دوم $7-4\sqrt{3}$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$7-4\sqrt{3}=(3+4-4\sqrt{3})=(2-\sqrt{3})^2$$

حالا داریم:

$$a=\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

حاصل عبارت $(a+\frac{1}{a}+\sqrt{2})^2(a+\frac{1}{a}-\sqrt{2})^2$ با استفاده از اتحاد مزدوج می‌شود $((a+\frac{1}{a})^2-2)^2$، پس داریم:

$$(a+\frac{1}{a})^2=a^2+\frac{1}{a^2}+2$$

گویا می‌کنیم

$$=2-\sqrt{3}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}+2=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+2=6$$

پس:

$$((a+\frac{1}{a})^2-2)^2=(6-2)^2=4^2=16$$

۱۲۷- گزینهٔ ۳ اگر پول علی و اکرم را به ترتیب x و y فرض کنیم، داریم:

$$\begin{cases}x+y=100\\(x-10)(y+10)=475\end{cases}$$

حل این دستگاه به روش معمول دشوار و وقت‌گیر است ولی اگر توجه کنیم که $475=5\times 95$، می‌توانیم بنویسیم:

$$\overbrace{(x-10)}^{5}\overbrace{(y+10)}^{95}=5\times 95\Rightarrow\begin{cases}x-10=5\\y+10=95\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=15\\y=85\end{cases}$$

پس پول اکرم ۸۵ تومان بوده است.

۱۲۸- گزینهٔ ۱ در معادلهٔ $x=x^2-4$ می‌توانیم بنویسیم:

$$x^2=x+4\xrightarrow{\times x}x^3=x^2+4x=x+4+4x$$
$$=5x+4$$

پس به جای x_1^3 و x_2^3 به ترتیب می‌گذاریم $5x_1+4$ و $5x_2+4$، از طرف دیگر می‌توانیم بنویسیم:

$$x=x^2-4\xrightarrow{\div x}1=x-\frac{4}{x}\Rightarrow\frac{4}{x}=x-1$$
$$\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{x-1}{4}$$

پس به جای $\frac{1}{x_1}$ و $\frac{1}{x_2}$ هم می‌نویسیم $\frac{x_1-1}{4}$ و $\frac{x_2-1}{4}$؛ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ اول یعنی $x^2-x-4=0$ برابر است با $S=1$ و $P=-4$.

حالا مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ دوم را پیدا می‌کنیم:

$$S_2=x_1^3+\frac{1}{x_2}+x_2^3+\frac{1}{x_1}$$
$$=5x_1+4+\frac{x_2-1}{4}+5x_2+4+\frac{x_1-1}{4}$$
$$=\frac{21}{4}\overbrace{(x_1+x_2)}^{S}+8-\frac{1}{2}=\frac{21}{4}(1)+\frac{15}{2}=\frac{21+30}{4}=\frac{51}{4}$$
$$P_2=(x_1^3+\frac{1}{x_2})(x_2^3+\frac{1}{x_1})$$
$$=(5x_1+\frac{x_2}{4}+\frac{15}{4})(5x_2+\frac{x_1}{4}+\frac{15}{4})$$
$$=25x_1x_2+\frac{5}{4}(x_1^2+x_2^2)+\frac{75}{4}(x_1+x_2)$$
$$+\frac{15}{16}(x_1+x_2)+\frac{x_1x_2}{16}+\frac{225}{16}$$
$$25s_1+\frac{5}{4}(s_1^2-2p)+\frac{75}{4}s+\frac{15}{16}s+\frac{p_1}{16}+\frac{225}{16}$$
$$=25(1)+\frac{5}{4}(1-2(-4))+\frac{75}{4}(1)+\frac{15}{16}(1)$$
$$-\frac{4}{16}+\frac{225}{16}=-\frac{221}{4}$$

پس معادلهٔ دوم عبارت است از:

$$x^2-\frac{51}{4}x-\frac{221}{4}=0\Rightarrow 4x^2=51x+221$$

۱۲۹- گزینهٔ ۱ به جای x می‌گذاریم $x=\frac{\pi}{12}$:

$$f(x)=32(\cos^2 x)(\cos^2 2x)(\cos^2 4x)(\cos^2 8x)(\cos^2 16x)$$

$$f(\frac{\pi}{12})=32\cos^2\frac{\pi}{12}\underbrace{\cos^2\frac{\pi}{6}}_{\frac{3}{4}}\underbrace{\cos^2\frac{\pi}{3}}_{\frac{1}{4}}\underbrace{\cos^2\frac{2\pi}{3}}_{\frac{1}{4}}\underbrace{\cos^2\frac{4\pi}{3}}_{\frac{1}{4}}$$

در مورد $\cos^2\frac{\pi}{12}$ هم با استفاده از رابطهٔ $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ داریم:

$$\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

پس: $f(\frac{\pi}{12})=32\times\frac{2+\sqrt{3}}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3(2+\sqrt{3})}{32}$

$$=\frac{6+3\sqrt{3}}{32}=\frac{6+\sqrt{27}}{32}$$

۱۳۰- گزینهٔ ۳ اول عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})-\sin(\alpha-\pi)}{|\tan^2\alpha-1|}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{|\tan^2\alpha-1|}$$

حالا مقدار $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را از روی $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ پیدا می‌کنیم:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\Rightarrow\sin^2\alpha=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{ناحیهٔ چهارم}}\sin\alpha=\frac{-\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

پس حاصل عبارت برابر است با:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{|\tan^2\alpha-1|}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{5}}{3}}{|\frac{5}{4}-1|}=\frac{4(2-\sqrt{5})}{3}$$

۱۳۱- گزینهٔ ۲ ابتدا معادله را ساده می‌کنیم:

$$5\sin^2 x+2\cos 3x=-2\Rightarrow 5\sin^2 x=-2(1+\cos 3x)$$

حالا با استفاده از رابطهٔ $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ داریم:

$$5\sin^2 x=-\cos^2\frac{3x}{2}$$

تساوی بالا فقط وقتی امکان‌پذیر است که $\sin^2 x$ و $\cos^2\frac{3x}{2}$ هر دو صفر باشند (چون یک طرف مثبت و طرف دیگر منفی است) $\sin^2 x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ در نقاط $-\pi$ و 0 و π صفر می‌شود و $\cos^2\frac{3x}{2}$ به ازای دو مقدار از این سه صفر می‌شود یعنی $-\pi$ و π، پس معادله در این بازه دو جواب دارد.

۱۳۲- گزینهٔ ۴

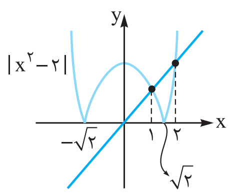
عددگذاری: در تابع $f(x)=\log_4(|x^2-2|-x)$ اگر به جای x بگذاریم $x=2$ داریم $\log_4(\overbrace{|4-2|-(2)}^{0})$ که تعریف نشده است پس $x=2$ نباید در دامنه باشد یعنی گزینه‌های ۲ و ۳ حذف می‌شوند.

از طرفی به جای x بگذاریم $x=-1$ داریم $\log_4(\overbrace{|1-2|-(-1)}^{2})$ یعنی $x=-1$ باید در دامنه باشد پس ۱ هم حذف می‌شود و جواب ۴ است.

راه دوم عبارت جلوی لگاریتم را بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم:

$$|x^2-2|-x>0\Rightarrow|x^2-2|>x$$

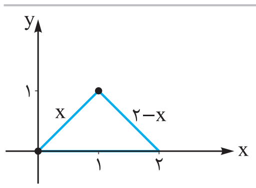
برای حل این معادله: نمودار دو تابع $y=|x^2-2|$ و $y=x$ را رسم می‌کنیم: حالا باید $|x^2-2|>x$ باشد. طول نقاط برخورد دو نمودار را پیدا می‌کنیم:



$$|x^2-2|=x\Rightarrow\begin{cases}x^2-2=x\Rightarrow x^2-x-2=0\\ \xrightarrow{a+c=b}x=-1,x=2\\ x^2-2=-x\Rightarrow x^2+x-2=0\\ \xrightarrow{a+b+c=0}x=-2,x=1\end{cases}$$

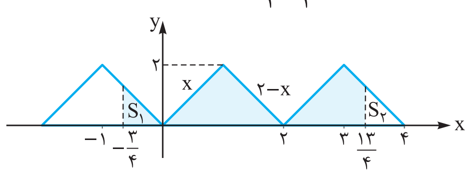
از روی نمودار معلوم است که $x=2$ و $x=1$ قابل قبول‌اند. با توجه به نمودار دامنهٔ تابع برابر است با $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

۱۳۳- گزینهٔ ۱ نمودار تابع را در یک دورهٔ تناوبش رسم می‌کنیم:



$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ 2-x & 1<x\le 2\end{cases}$$

حالا برای پیداکردن مساحت ناحیهٔ محصور بین نمودار و محور xها در بازهٔ $[-0/75,3/25]$ یا $[-\frac{3}{4},\frac{13}{4}]$ نمودار را در این بازه رسم می‌کنیم:



حالا اگر به نمودار دقت کنیم $S_1=S_2$ است، پس مساحت ناحیهٔ محصور، مساوی ۲ برابر مساحت یکی از مثلث‌های رسم‌شده است؛ یعنی:

$$2\times\frac{2\times 1}{2}=2$$

۱۳۴- گزینهٔ ۲ می‌دانیم تابع $y=\sqrt{x+3}-1$ (که اکیداً صعودی است) نمودار تابع وارون خودش را روی خط $y=x$ قطع می‌کند، پس:

$$\begin{cases}y=\sqrt{x+3}-1\\ y=x\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x+3}-1=x$$

$$\Rightarrow\sqrt{x+3}=x+1$$

معادلهٔ به دست آمده را حل می‌کنیم: (دامنهٔ معادله $x \geq -۱$ است.)

$\sqrt{x+۳}=x+۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+۳=x^۲+۲x+۱$

$\Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} x=۱, x=-۲$

$x=-۲$ غیر قابل قبول است چون در دامنه نیست. پس نقطهٔ برخورد می‌شود $A(۱,۱)$ که فاصله‌اش از مبدأ مختصات برابر است با:

$OA=\sqrt{۱^۲+۱^۲}=\sqrt{۲}$

۱۳۵- گزینهٔ ۱ اگر مسافت‌هایی که توپ طی می‌کند را بنویسیم:

$۶, ۶(۰/۸), ۶(۰/۸), ۶(۰/۸)^۲, ۶(۰/۸)^۲, \ldots, ۶(۰/۸)^{۹۹}$

$, ۶(۰/۸)^{۹۹}$

مجموع جملات دنبالهٔ بالا را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم:

مجموع مسافت‌ها $=۶+۲(۶(۰/۸)+۶(۰/۸)^۲+\cdots+۶(۰/۸)^{۹۹})$

عبارت داخل پرانتز یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $۶(۰/۸)$ و قدر نسبت $۰/۸$ است و چون مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی از رابطهٔ $S_n=a_۱\frac{۱-r^n}{۱-r}$ به دست می‌آید (که در کتاب درسی‌تان نیست!) پس داریم:

$S_{۹۹}=۶(۰/۸)(\frac{۱-(۰/۸)^{۹۹}}{۱-۰/۸})=\frac{۴/۸}{۰/۲}(۱-(۰/۸)^{۹۹})$

$=۲۴(۱-(۰/۸)^{۹۹})$

$(۰/۸)^{۹۹}$ یک عدد بسیار کوچک است و اگر در محاسبهٔ تقریبی از آن صرف‌نظر کنیم، مجموع مسافت‌ها می‌شود:

مجموع مسافت‌ها $=۶+۲(S_{۹۹})=۶+۲(۲۴)=۵۴$

۱۳۶- گزینهٔ ۱ تغییرات گفته‌شده را روی ضابطهٔ تابع اعمال می‌کنیم:

$y=۲^{x+|x|} \xrightarrow[\text{در جهت منفی محور xها}]{\text{انتقال ۳ واحد}} y=۲^{x+۳+|x+۳|}$

$\xrightarrow[\text{در جهت منفی محور yها}]{\text{انتقال ۲ واحد}} y=۲^{x+۳+|x+۳|}-۲$

حالا تابع به دست آمده را با محور xها (همان $y=۰$) قطع می‌دهیم:

$۲^{x+۳+|x+۳|}-۲=۰ \Rightarrow ۲^{x+۳+|x+۳|}=۲$

$\Rightarrow x+۳+|x+۳|=۱$

حالا برای ادامه دو روش داریم:

عددگذاری: گزینه‌ها را در تساوی $x+۳+|x+۳|=۱$ امتحان کنیم:

$x=-\frac{۵}{۲} \Rightarrow -\frac{۵}{۲}+۳+|-\frac{۵}{۲}+۳|=\frac{۱}{۲}+|\frac{۱}{۲}|=۱ \checkmark$

راه دوم معادله را با فرض $x \geq -۳$ و $x \leq -۳$ حل می‌کنیم:

$x \geq -۳ \Rightarrow x+۳+|x+۳|=۱ \Rightarrow x+۳+x+۳=۱$

$\Rightarrow ۲x=-۵ \Rightarrow x=\frac{-۵}{۲} \checkmark$

پس جواب می‌شود $x=\frac{-۵}{۲}$

۱۳۷- گزینهٔ ۳ به جای x می‌گذاریم $x=۹$:

$۲\log_x a+\log_a \sqrt{x}=۲ \Rightarrow ۲\log_۹ a+\log_a ۳=۲$

حالا می‌توانیم بنویسیم:

$۲\log_{۳^۲} a+\log_a ۳=۲ \Rightarrow \frac{۲}{۲}\log_۳ a+\log_a ۳=۲$

$\Rightarrow \log_۳ a+\log_a ۳=۲$

این معادله را می‌توانیم با فرض $\log_۳ a=t$ حل کنیم ولی اگر دقت کنیم مجموع $\log_۳ a$ و $\log_a ۳$ (که معکوس یکدیگرند) برابر ۲ شده است پس باید $\log_۳ a=۱$ باشد یعنی $a=۳$.

۱۳۸- گزینهٔ ۴ حد را به دو کسر تفکیک می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۴-x^۲+۱}+\sqrt{x^۲+۱}-x^۲}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۴-x^۲+۱}-x^۲}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۲+۱}}{x}$$

برای پیداکردن حد اولی فرض می‌کنیم $x^۲=t$، داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۴-x^۲+۱}-x^۲}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t^۲-t+۱}-t}{-\sqrt{t}}$$

حالا با استفاده از هم‌ارزی رادیکال‌ها داریم:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t^۲-t+۱}-t}{-\sqrt{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{|t-\frac{۱}{۲}|-t}{-\sqrt{t}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{t-\frac{۱}{۲}-t}{-\sqrt{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\frac{۱}{۲}}{-\sqrt{t}}=۰$$

و حد دوم هم برابر است با:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^۲+۱}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-۱$$

پس حاصل حد خواسته‌شده برابر است با $۰-۱=-۱$

۱۳۹- گزینهٔ ۳ ابتدا معادلهٔ سهمی را می‌نویسیم:

$S(۲,۱),O(۰,۰) \Rightarrow y=a(x-۲)^۲+۱$

$\xrightarrow{(۰,۰)} ۰=۴a+۱ \Rightarrow a=\frac{-۱}{۴}$

$\Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۴}(x-۲)^۲+۱$

حالا با توجه به شکل چون طول رأس سهمی باید از دو نقطهٔ برخوردش با محور xها به یک فاصله باشد طول نقطهٔ برخورد سهمی (و خط) با محور xها برابر $x=۴$ است. معادلهٔ خط y را هم می‌نویسیم:

$(۰,۱),(۴,۰) \Rightarrow m=\frac{۰-۱}{۴-۰}=-\frac{۱}{۴} \Rightarrow g(x)=-\frac{۱}{۴}x+۱$

حالا حاصل حد را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۴^-}\frac{f(x)+g(x)}{۴-x}=\lim_{x\to۴^-}\frac{-\frac{۱}{۴}(x-۲)^۲+۱-\frac{۱}{۴}x+۱}{۴-x}$$

$$\overset{Hop}{=}\lim_{x\to۴^-}\frac{-\frac{۱}{۲}(x-۲)-\frac{۱}{۴}}{-۱}=\frac{-۱-\frac{۱}{۴}}{-۱}=\frac{۵}{۴}$$

۱۴۰- گزینهٔ ۱ **راه اول** می‌دانیم منحنی یک تابع و منحنی تابع وارونش نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند پس مماس‌هایشان هم در نقاط متناظر نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند و در نتیجه شیب خط مماس بر منحنی تابع وارون برابر عکس شیب خط مماس بر منحنی خود تابع است. بنابراین اول با استفاده از طول نقطهٔ روی تابع $f^{-۱}(x)$ که همان عرض نقطهٔ متناظرش روی خود تابع است، شیب خط مماس را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}=۲ \Rightarrow \sqrt{x}+۱=۲\sqrt{x}-۲$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=۳ \Rightarrow x=۹$$

پس طول نقطهٔ روی خود تابع برابر $x=۹$ است. مشتق می‌گیریم و شیب مماس را پیدا می‌کنیم: (با استفاده از $((\frac{au+b}{cu+d})'=\frac{(ad-bc)u'}{(cu+d)^۲})$

$$f'(x)=\frac{-۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})}{(\sqrt{x}-۱)^۲} \xrightarrow{x=۹} m=\frac{-\frac{۱}{۳}}{(۳-۱)^۲}=-\frac{۱}{۱۲}$$

بنابراین شیب خط مماس بر منحنی تابع وارون برابر است با ۱۲-.

راه دوم تابع وارون f را پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱} \Rightarrow y\sqrt{x}-y=\sqrt{x}+۱$$

$$\Rightarrow y\sqrt{x}-\sqrt{x}=y+۱ \Rightarrow \sqrt{x}(y-۱)=y+۱$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=\frac{y+۱}{y-۱} \Rightarrow x=(\frac{y+۱}{y-۱})^۲$$

$$\xrightarrow{x\Leftrightarrow y} y=(\frac{x+۱}{x-۱})^۲$$

ضابطهٔ تابع وارون شد $f^{-۱}(x)=(\frac{x+۱}{x-۱})^۲$، حالا مشتق می‌گیریم و شیب خط مماس در $x=۲$ را پیدا می‌کنیم:

$$y=(\frac{x+۱}{x-۱})^۲ \Rightarrow y'=۲(\frac{x+۱}{x-۱})(\frac{-۲}{(x-۱)^۲})$$

$$\xrightarrow{x=۲} m=۲\times ۳\times(\frac{-۲}{۱})=-۱۲$$

۱۴۱- گزینهٔ ۱ تابع $f(x)=x(۱-x^۲)$ در تمام نقاط پیوسته است و تابع $g(x)=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۰$ ناپیوسته است پس تابع $(fof)og=f(f(g(x)))$ ممکن است در نقاطی که $g(x)=۰$ می‌شود یعنی $x=۰$ ناپیوسته باشد:

$$(fof)og(۰)=f(f(g(۰)))=f(f(۰))=f(۰)=۰$$

$$\lim_{x\to ۰^+}(fof)og=\lim_{x\to ۰^+}f(f(\overset{۱}{g(x)}))=f(f(۱))=f(۰)=۰$$

$$\lim_{x\to ۰^-}(fof)og=\lim_{x\to ۰^-}f(f(\overset{-۱}{g(x)}))=f(f(-۱))=f(۰)=۰$$

پس تابع $(fof)og$ در $x=۰$ پیوسته است و تعداد نقاط ناپیوستگی برابر است با صفر.

۱۴۲- گزینهٔ ۲ نمودار تابع را با شرط $|x|\le\sqrt{۳}$ و $|x|>\sqrt{۳}$ رسم می‌کنیم:

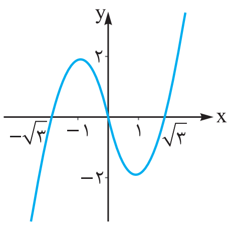
$$|x|\le\sqrt{۳} \Rightarrow y=x|\overbrace{۳-x^۲}^{\oplus}|=x(۳-x^۲)=۳x-x^۳$$

$$|x|\ge\sqrt{۳} \Rightarrow y=x|\overbrace{۳-x^۲}^{\ominus}|=x(x^۲-۳)=x^۳-۳x$$

دو نمودار $y=x^۳-۳x$ و $y=-x^۳+۳x$ نسبت به محور طول‌ها قرینهٔ یکدیگرند پس کافی است یکی را رسم کنیم:

$y=x^۳-۳x$

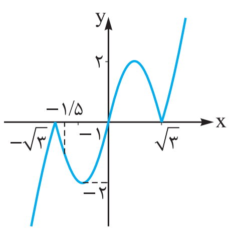
$y'=۳x^۲-۳ \Rightarrow$ ریشه‌های مشتق: $x=-۱,x=۱$



$y=x^۳-۳x$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۲	↘	۲-	↗	

بنابراین نمودار تابع به شکل زیر است: حالا با توجه به شکل، مقدار مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[-۱/۵,\sqrt{۳}]$ برابر است با ۲-.



۱۴۳- گزینهٔ ۲ در تابع $f(x)=-\sqrt[۳]{x}$ اگر طول نقطه را α فرض کنیم، داریم $A(\alpha,-\sqrt[۳]{\alpha})$ و در نتیجه قرینه‌اش نسبت به خط نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم می‌شود $A'(\sqrt[۳]{\alpha},-\alpha)$، پس طول AA' برابر است با:

$$AA'=\sqrt{(\alpha-\sqrt[۳]{\alpha})^۲+(-\sqrt[۳]{\alpha}+\alpha)^۲}=\sqrt{۲(\alpha-\sqrt[۳]{\alpha})^۲}$$

$$=\sqrt{۲}|\alpha-\sqrt[۳]{\alpha}| \overset{۰\le\alpha\le ۱}{=\!=} \sqrt{۲}(\sqrt[۳]{\alpha}-\alpha)$$

حالا $\sqrt{۲}(\sqrt[۳]{\alpha}-\alpha)$ قرار است ماکزیمم شود، نسبت به α مشتق می‌گیریم و طول نقطهٔ بحرانی را پیدا می‌کنیم:

$$y=\sqrt{۲}(\sqrt[۳]{\alpha}-\alpha) \Rightarrow y'=\sqrt{۲}(\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{\alpha^۲}}-۱)$$

$$y'=۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{\alpha^۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \alpha^۲=\frac{۱}{۲۷} \Rightarrow \alpha=\frac{۱}{\sqrt{۲۷}}$$

$$=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

حالا طول AA' را پیدا می‌کنیم:

$$AA'=\sqrt{2}\left(3\sqrt{\frac{1}{3\sqrt{3}}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\sqrt{2}\left(3\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{3})^3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\sqrt{2}\times\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\text{صورت و مخرج ضرب در }\sqrt{2}}\frac{4}{3\sqrt{6}}$$

۱۴۴- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$ پس برای پیداکردن مقدار مشتق چپ تابع fog در $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ باید $g'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})$ و $f'(g(\frac{\sqrt{5}}{2})^-)$ را پیدا کنیم:

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow g(\frac{\sqrt{5}}{2})^-=\frac{1}{\sqrt{(\frac{5}{4})^- -1}}=\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{4})^-}}$$

$$=\frac{1}{(\frac{1}{2})^-}=2^+$$

$$g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}(2x)$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{-x}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \Rightarrow g'_-(\frac{\sqrt{5}}{2})=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{(\frac{1}{4})^3}}$$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{8}}=-4\sqrt{5}$$

$$f(x)=(x[x])^3 \overset{x=\frac{\sqrt{5}}{2}}{=\!=\!=} (x[\overbrace{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{2}])^3=8x^3$$

$$f'(x)=24x^2 \Rightarrow f'(g(\frac{\sqrt{5}}{2})^-)=f'_+(2)=24(4)=96$$

پس مشتق fog برابر است با $-4\sqrt{5}\times 96=-48\sqrt{5}\times 8$ که ۸ برابر $-48\sqrt{5}$ است.

۱۴۵- گزینهٔ ۱ $g(x)=ax^2+5x+b$ است، پس ضابطهٔ f عبارت است از:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+5x+b & x\le 2 \\ 2ax+5 & x>2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2ax+5 & x\le 2 \\ 2a & x>2 \end{cases}$$

قرار است f در $x=2$ مشتق‌پذیر باشد پس باید هم مشتق‌پذیر و هم پیوسته باشد:

$$x=2 \text{ پیوستگی در } \Rightarrow 4a+10+b=4a+5 \Rightarrow b=-5$$

$$x=2 \text{ مشتق‌پذیری در } \Rightarrow 4a+5=2a \Rightarrow a=-\frac{5}{2}$$

پس مقدار $a+b$ برابر است با $-\frac{5}{2}-5=-\frac{15}{2}$.

۱۴۶- گزینهٔ ۳ N نقطه‌ای روی سهمی به مختصات (x,y) است، پس:

$$NM=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2-6x+9+\underbrace{y^2}_{4x}}$$

$$=\sqrt{x^2-2x+9}=\sqrt{(x-1)^2+8}$$

واضح است که کم‌ترین مقدار فاصله به ازای $x=1$ و برابر $\sqrt{8}$ یا $2\sqrt{2}$ است.

۱۴۷- گزینهٔ ۴ اگر A و B پیشامد متولدشدن خرگوش نر در دورهٔ بارداری اول و دوم باشند، داریم:

احتمال متولدشدن یک خرگوش نر: $P(A)=P(B)=\frac{70}{100}$

احتمال متولدشدن دو خرگوش نر: $P(A\cap B)=\frac{60}{100}$

حالا احتمال $P(B|A)$ را می‌خواهیم:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{60}{100}}{\frac{70}{100}}=\frac{6}{7}$$

۱۴۸- گزینهٔ ۳ در معادلهٔ $ax^2+bx-c=0$ (که حتماً $\Delta>0$ است، چون a، b و c از اعداد ۱ تا ۹ انتخاب می‌شوند و در نتیجه علامت a و c متفاوت است.) مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{c}{a}$ است. اگر فاصلهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌ها تا مجموع ریشه‌ها برابر ۲ باشد، باید داشته باشیم:

$$\text{فاصله}=|-\frac{c}{a}-(\frac{-b}{a})|=2 \Rightarrow \frac{|b-c|}{a}=2$$

$$\Rightarrow |b-c|=2a$$

پس باید b و c را طوری انتخاب کنیم که تفاضلشان برابر $2a$ (یعنی عددی زوج) باشد.

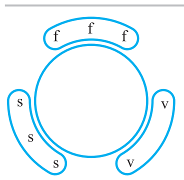
برای این کار b و c باید یا از اعداد فرد ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ و یا از اعداد زوج ۲، ۴، ۶ و ۸ انتخاب شوند:

$$\text{اعداد فرد} \Rightarrow \binom{5}{2}=10$$

$$\text{اعداد زوج} = \binom{4}{2}=6$$

پس در کل $16=6+10$ حالت برای انتخاب b و c داریم و چون قرار است $|b-c|=2a$ باشد، یعنی b و c می‌توانند جابه‌جا شوند یعنی تعداد حالت‌ها می‌شود $2\times 16=32$.

۱۴۹- گزینهٔ ۲ اگر بازیکنان فوتبال را با f و والیبال را با v و شناگران را با s نشان دهیم، افراد باید به شکل مقابل دور میز بنشینند.



چون قرار است افراد هم‌تیمی کنار هم باشند که $\boxed{f,f,f}$ ، $\boxed{v,v}$ و $\boxed{s,s,s}$ را به هم می‌چسبانیم. حالا تعداد راه‌های نشستن این افراد برابر است با:

$$\underbrace{(۳-۱)!}_{\text{جایگشت دوری ۳ منحنی}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جایگشت فوتبالی‌ها}} \times \underbrace{۲!}_{\text{جایگشت والیبالی‌ها}} \times \underbrace{۳!}_{\text{جایگشت شناگرها}}$$

$$=۲\times۶\times۲\times۶=۱۴۴$$

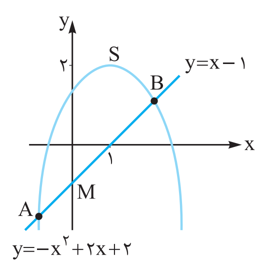
۱۵۰- گزینهٔ ۴ هر کدام از زیرمجموعه‌های ۱رقمی، ۲رقمی، ۳رقمی، ۴رقمی و ۵رقمی را بررسی می‌کنیم. (می‌دانیم عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع ارقامش بر ۳ بخش‌پذیر باشد.)

	حالت بخش‌پذیر	تعداد کل حالت‌ها	تعداد حالت‌های مطلوب
یک‌رقمی	۳	۵	۱
دورقمی	۱,۲ ۱,۵ ۲,۴ ۵,۴	$۵\times۴=۲۰$	$۴\times۲!=۸$
سه‌رقمی	۱,۲,۳ ۱,۳,۵ ۲,۳,۴ ۳,۴,۵	$۵\times۴\times۳=۶۰$	$۴\times۳!=۲۴$
چهاررقمی	۱,۲,۴,۵	$۵\times۴\times۳\times۲=۱۲۰$	$۴!=۲۴$
پنج‌رقمی	۱,۲,۳,۴,۵	$۵!=۱۲۰$	$۵!=۱۲۰$

پس احتمال این‌که عدد ساخته‌شده بر ۳ بخش‌پذیر باشد، برابر است با:

$$\frac{۱+۸+۲۴+۲۴+۱۲۰}{۵+۲۰+۶۰+۱۲۰+۱۲۰}=\frac{۱۷۷}{۳۲۵}$$

۱۵۱- گزینهٔ ۴



معادلهٔ سهمی عبارت است از $y=-x^۲+۲x+۱$، پس رأسش نقطه‌ای به طول $x=\frac{-b}{۲a}=۱$ و عرض $y=-۱+۲+۱=۲$ است؛ یعنی $S(۱,۲)$.

معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $(۱,۰)$ و با عرض از مبدأ -۱ عبارت است از $y=x-۱$، سهمی و خط را قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases}y=-x^۲+۲x+۱\\ y=x-۱\end{cases}\Rightarrow -x^۲+۲x+۱=x-۱$$

$$\Rightarrow x^۲-x-۲=۰$$

ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-x-۲=۰$ برابر طول نقاط A و B اند و ما طول نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB را می‌خواهیم، پس:

$$x_M=\frac{\overbrace{x_A+x_B}^{\text{مجموع ریشه‌های معادله}}}{۲}=\frac{-\frac{-۱}{۱}}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow M(\frac{۱}{۲},-\frac{۱}{۲})$$

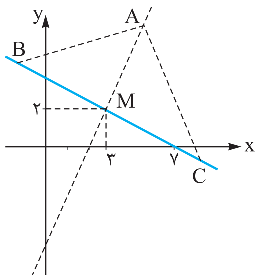
حالا طول SM را پیدا می‌کنیم:

$$SM=\sqrt{(۱-\frac{۱}{۲})^۲+(۲-(-\frac{۱}{۲}))^۲}=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۲۵}{۴}}=\sqrt{\frac{۲۶}{۴}}$$

$$=\frac{\sqrt{۲۶}}{۲}$$

پس طول پاره‌خط $\frac{۱}{۲}$ برابر $\sqrt{۲۶}$ است.

۱۵۲- گزینهٔ ۲ طبق شکل زیر چون فاصلهٔ نقطهٔ A از دو رأس B و C با هم برابر است، نقطهٔ A باید روی عمودمنصف پاره‌خط BC قرار گیرد. شیب خط $x+۲y=۷$ برابر $-\frac{۱}{۲}$ است. پس شیب عمودمنصف برابر است با ۲ و عمودمنصف از نقطهٔ $M(۳,۲)$ می‌گذرد.



$$M(۳,۲),m=۲\Rightarrow y=۲x-۴$$

بنابراین A نقطه‌ای است با مختصات $A(\alpha,۲\alpha-۴)$، فاصلهٔ A از نقطهٔ M باید برابر $۵\sqrt{۵}$ باشد، پس:

$$AM=۵\sqrt{۵}\Rightarrow\sqrt{(\alpha-۳)^۲+(۲\alpha-۴-۲)^۲}=۵\sqrt{۵}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}(\alpha-۳)^۲+۴(\alpha-۳)^۲=۱۲۵$$

$$\Rightarrow ۵(\alpha-۳)^۲=۱۲۵\Rightarrow(\alpha-۳)^۲=۲۵$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}}|\alpha-۳|=۵\Rightarrow\begin{cases}\alpha-۳=۵\Rightarrow\alpha=۸\\ \alpha-۳=-۵\Rightarrow\alpha=-۲\end{cases}$$

۱۵۳- گزینهٔ ۲ ابتدا مرکز و شعاع دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲y=۳$ را پیدا می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲+۲y-۳=۰\Rightarrow O(۰,-۱)$$

$$r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰^۲+(۲)^۲-۴(-۳)}=\frac{۱}{۲}\times۴=۲$$

حالا اگر مرکز دایرهٔ دوم را $O'(\alpha,\beta)$ فرض کنیم، چون شعاع دایرهٔ دوم برابر قطر دایرهٔ اول است، پس $r'=۲(۲)=۴$ و معادلهٔ دایرهٔ دوم عبارت است از $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=۱۶$. حالا اولاً این دایره باید از نقطهٔ $(۰,-۳)$ بگذرد:

$$(۰,-۳)\Rightarrow\alpha^۲+(\beta+۳)^۲=۱۶$$

و ثانیاً چون دو دایره مماس داخل‌اند پس باید $OO'=|r-r'|$ باشد:

$$OO'=\sqrt{(\alpha-۰)^۲+(\beta+۱)^۲}\Rightarrow\sqrt{\alpha^۲+(\beta+۱)^۲}=۴-۲$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}\alpha^۲+(\beta+۱)^۲=۴$$

حالا دو رابطهٔ به دست آمده را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases}\alpha^۲+(\beta+۳)^۲=۱۶\\ \alpha^۲+(\beta+۱)^۲=۴\end{cases}\xrightarrow{(-)}(\beta+۳)^۲-(\beta+۱)^۲=۱۲$$

$$\Rightarrow(\beta+۳+\beta+۱)(\beta+۳-\beta-۱)=۱۲$$

$$\Rightarrow(۲\beta+۴)(۲)=۱۲\Rightarrow ۲\beta+۴=۶\Rightarrow\beta=۱$$

و با قراردادن $\beta=۱$ در یکی از معادلات داریم:

$$\alpha^{۲}+۴=۴ \Rightarrow \alpha=۰$$

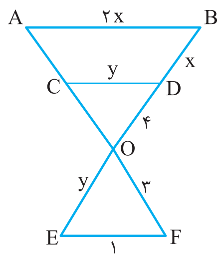
پس معادلهٔ دایرهٔ دوم عبارت است از:

$$O'(۰,۱), r'=۴ \Rightarrow x^{۲}+(y-۱)^{۲}=۱۶$$

$$\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲y=۱۵$$

جواب درست در گزینه‌ها نیست!

۱۵۴- گزینهٔ ۳ اولاً دو مثلث OCD و OEF متشابه‌اند، پس:



$$\frac{CD}{EF}=\frac{OD}{OE} \Rightarrow \frac{y}{۱}=\frac{۴}{y} \Rightarrow y^{۲}=۴ \Rightarrow y=۲$$

$$\frac{CD}{EF}=\frac{OC}{OF} \Rightarrow \frac{۲}{۱}=\frac{OC}{۳} \Rightarrow OC=۶$$

ثانیاً دو مثلث OCD و OAB متشابه‌اند، پس:

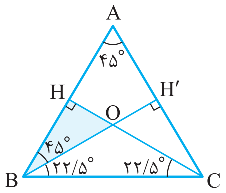
$$\frac{OD}{OB}=\frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{۴}{۴+x}=\frac{y}{۲x} \xrightarrow{y=۲} \frac{۴}{۴+x}=\frac{۲}{۲x}$$

$$\Rightarrow ۴x=۴+x \Rightarrow x=\frac{۴}{۳}$$

ثالثاً $CD \parallel AB$ است، پس:

$$\frac{OD}{DB}=\frac{OC}{AC} \Rightarrow \frac{۴}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۶}{AC} \Rightarrow AC=\frac{۶\times\frac{۴}{۳}}{۴}=۲$$

۱۵۵- گزینهٔ ۴



مثلث $AH'B$ قائم‌الزاویه است پس چون $\hat{B}=۴۵^\circ$؛ داریم:

$$\sin B=\frac{AH'}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{AH'}{۸} \Rightarrow AH'=۴\sqrt{۲}$$

بنابراین $AH=۴\sqrt{۲}$ و در نتیجه $BH=۸-۴\sqrt{۲}$.

حالا در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHB داریم $\hat{B}=۴۵^\circ$ پس $OH=BH$.

یعنی $BH=OH=۴(۲-\sqrt{۲})$ و در نتیجه مساحت مثلث OHB برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}BH\times OH \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}(۴(۲-\sqrt{۲}))^{۲}$$

$$=\frac{۱}{۲}\times۱۶(۶-۴\sqrt{۲})=۸\times۲(۳-۲\sqrt{۲})=۱۶(۳-۲\sqrt{۲})$$

چون جوابی به شکل بالا در گزینه‌ها نیست عبارت $۳-۲\sqrt{۲}$ را در مزدوجش ضرب می‌کنیم:

$$۱۶(۳-۲\sqrt{۲})\times\frac{۳+۲\sqrt{۲}}{۳+۲\sqrt{۲}}=\frac{۱۶(۹-۸)}{۳+۲\sqrt{۲}}=\frac{۱۶}{۳+۲\sqrt{۲}}$$